

Cap 15 Oscilações

aula anterior

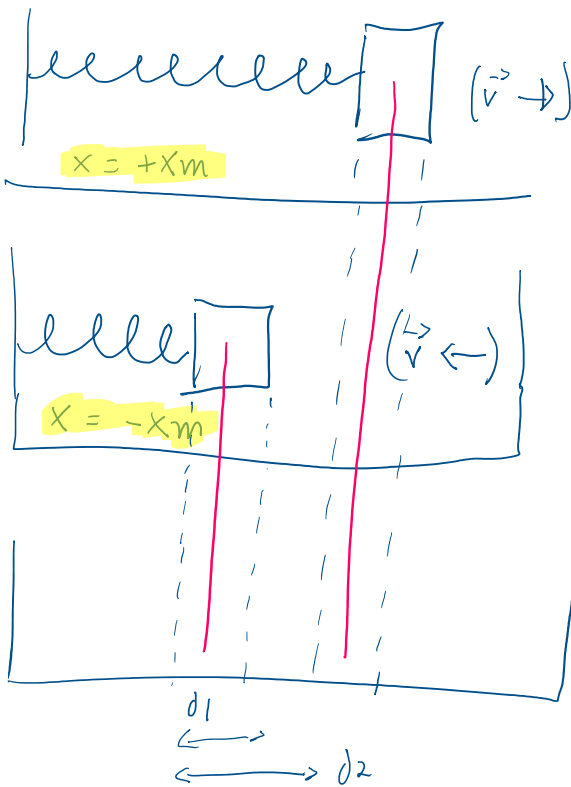
$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -X_m \omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Massa mola - 16.21



1) Considero uma massa M presa em uma mola k e um deslocamento inicial $x_0 > 0$ em uma superfície sem atrito

$$x(t) = ?$$

$$x(t) = ?$$



$\vec{p}$ (mas não influencia no movimento)

$$F_{KX} = m \cdot a$$

$$F_K = M \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$-kx = M \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{M} x = 0 \quad \text{EDO} \quad 2^{\text{a}} \text{ ordem}$$

Solução EDO 2^a ordem

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + a \frac{dz}{dt} + bz = 0$$

1) Sol. particular

$$z_p = e^{rt} = \text{descobre } r's$$

escolher 1 r

$$2) z(t) = C_1 z_p = C e^{it} z_p$$

3) Ajuste dos coef

isso está
nas notas de aula
e formalizar
da prova

EDO 2^a ordem

• exponencial
Lo derivar duas
vezes e comparar

3) Ajuste dos eixos

$$3) X(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$$

↳ deriva duas
vezes e continua
lá → tipo sen/cos

4) Ajuste de constante (sempre está no enunciado)

1) Reescrever (no formato do

Formulário

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} z = 0 \quad (2)$$

z pode ser imaginário
(troquei x por z)
 $= x = \operatorname{Re}[z]$ (parte real de z)

⇒ 1.ª Solução particular

$$z_p = e^{rt}$$

$$\frac{dz_p}{dt} = e^{rt} \cdot r \quad (3a)$$

$$\frac{d^2 z_p}{dt^2} = e^{rt} \cdot r^2 \quad (3b)$$

substituir
na (2)

$$r^2 e^{rt} + \frac{k}{m} e^{rt} = 0$$

↙ escolhe 2 r

$$r = \pm \sqrt{\frac{-K}{m}} \Rightarrow r = i \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$z_p = e^{i \sqrt{\frac{K}{m}} t}$$

$$2^a) z(t) = C e^{i\varphi} z_p$$

tem
parte

$$z(t) = C e^{i\varphi} e^{i \sqrt{\frac{K}{m}} t}$$

real e
imaginária

$$z(t) = C e^{(\varphi + \sqrt{\frac{K}{m}} t)i}$$

achar a parte real

$$3^a) x(t) = \text{Re}[z(t)]$$

usando *:

$$z(t) = C \cos\left(\varphi + \sqrt{\frac{K}{m}} t\right) + C i \sin\left(\varphi + \sqrt{\frac{K}{m}} t\right)$$

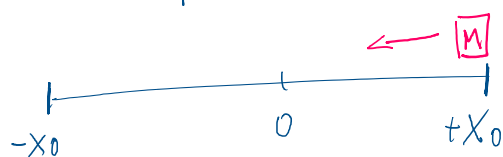
real

imaginária

4) Ajuste das constantes $\Rightarrow$ enunciado
($x = (t = 0)$)

$$x(t) = C \cos\left(\varphi + \sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$\downarrow$
 X_0 pois a maior oscilação deve ser X_0



$$x(t=0) = X_0 = C \cos(\varphi)$$

$$x(t=0) = X_0 = X_0 \cos\left(\varphi + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0\right)$$

$$\cos \varphi = 1$$

$$\varphi = 0$$

= finalmente

$$x(t) = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

φ é uma constante

no caso a posição, independente do tempo ele precisa ser o mesmo

Observação

Na aula anterior vimos
MHS

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

hoje:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + 0\right)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Outro exemplo (com atrito)

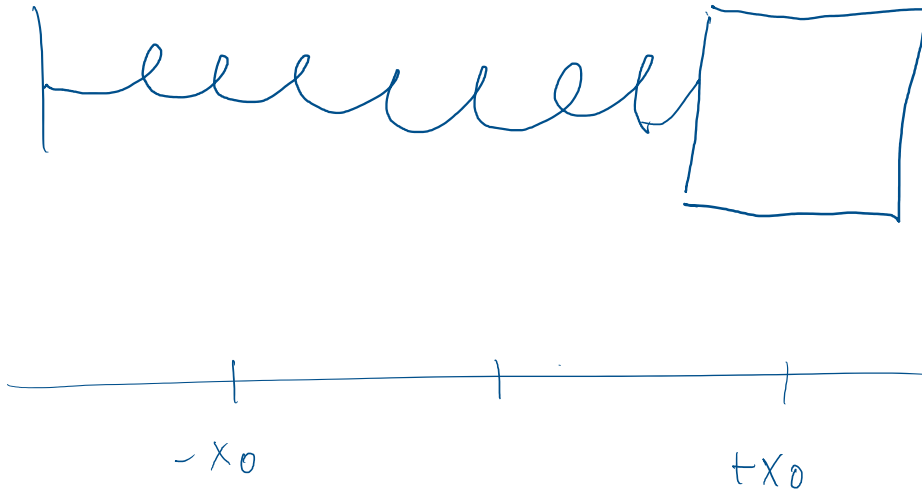
Massa M + mola k

posição inicial $x_0 > 0$

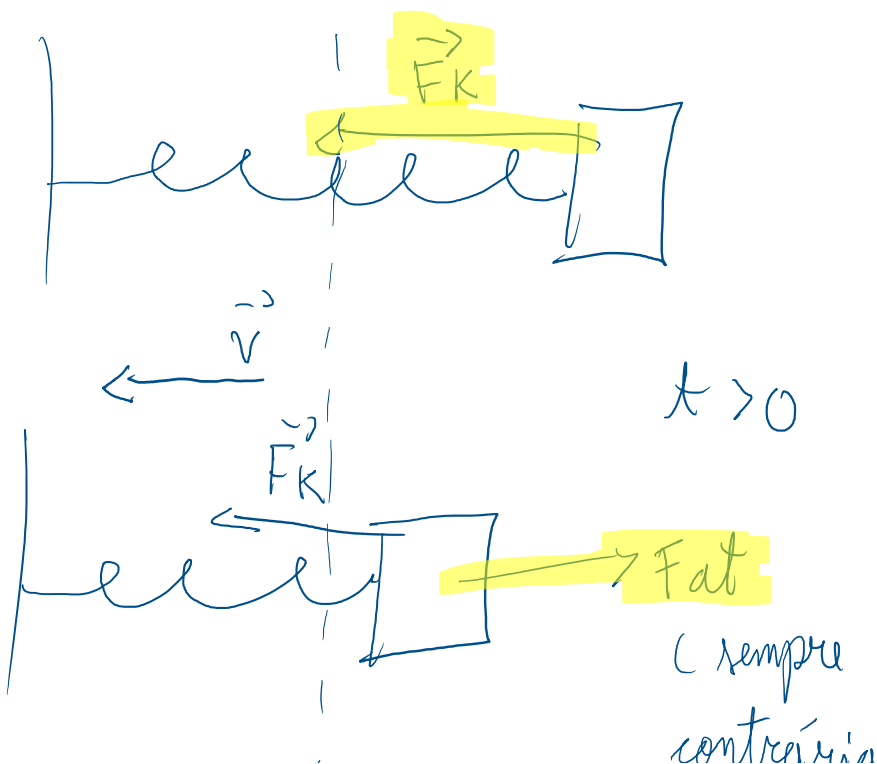
+ atrito

$$\rightarrow \underbrace{F_{at} = -bv}_{\text{força contrária}}$$

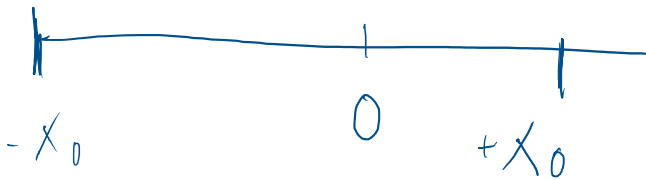
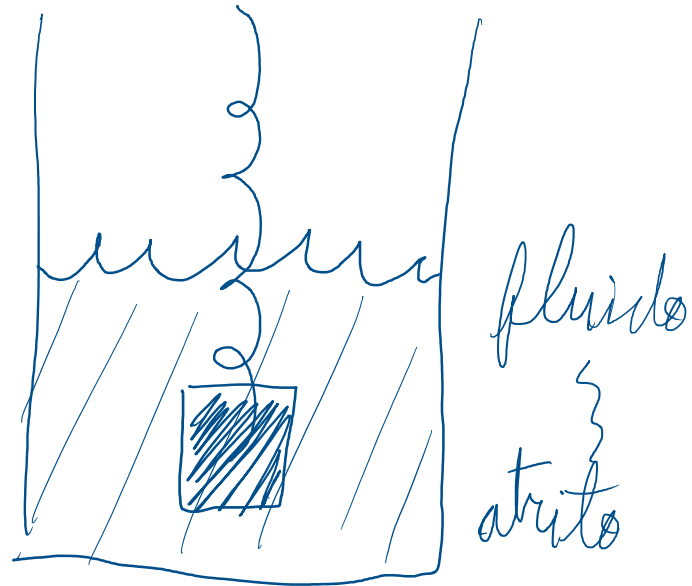
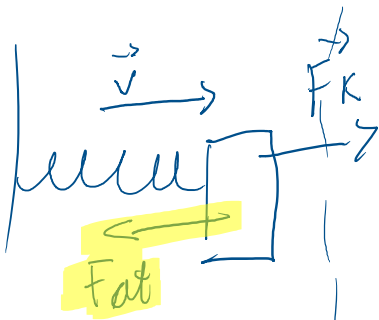
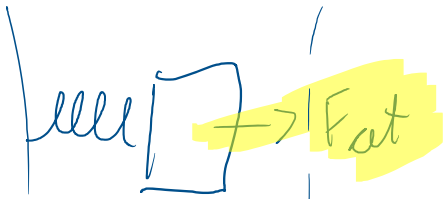
→ força contrária
ao movimento



Calcule $x(t) = ?$



contrária
à tendência
de movimento)



$$F_{Rx} = ma$$

$$\vec{F}_K + \vec{F}_{at} = m \vec{a}$$

$$-Kx - Bv = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-Kx - \beta \underbrace{\left(\frac{dx}{dt} \right)}_{\text{velocidade}} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + Kx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{m dt} + \frac{K}{m} x = 0$$

$$x = z :$$

EDO

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{K}{m} z = 0$$

$$1) Z_p = e^{rt} \quad (2)$$

$$dz_p = e^{rt} \cdot r \quad (3)$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = e^{rt} \cdot r^2 \quad (4)$$

(2), (3) e (4)

$$\cancel{e^{rt}} \cdot r^2 + \frac{\beta}{m} \cancel{e^{rt}} \cdot r + \frac{K}{m} \cancel{e^{rt}} = 0$$

$$r^2 + \frac{\beta}{m} r + \frac{K}{m} = 0$$

$$r = \underline{-\frac{\beta}{m}} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4K}{m}}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$r = \frac{-\beta}{2m} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - \frac{K}{m}}}{2}$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{K}{m}}$$

(Z particular)

$$Z_p = e^{\left(\frac{-\beta}{2m} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{K}{m}} \right) t}$$

2^o)

$$Z(t) = C e^{i\varphi} e^{\left(\frac{-\beta}{2m} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{K}{m}} \right) t}$$

→ resolvendo p/ atrito
para $\beta \rightarrow 0$

sol atrito

$$\boxed{\frac{\beta^2}{4m^2} < \frac{K}{m}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{-B}{4m^2} - \frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{B^2}{4m^2}} i$$

$$Z(t) = C e^{i \left(\varphi + \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{B^2}{4m^2}} t \right) - \frac{B}{2m} t}$$

$$Z(t) = C e^{\left(\frac{-B}{2m}\right)t} \left[\cos \left(\varphi + \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{B^2}{4m^2}} t \right) + i \sin(\dots) \right]$$

$$3^\circ) x(t) = \operatorname{Re}[Z]$$

$$x(t) = C e^{\frac{-Bt}{2m}} \cos \left(\sqrt{\frac{K}{m} - \frac{B^2}{4m^2}} t + \varphi \right)$$

$\uparrow$
 (amplitude)

$\left(\begin{array}{l} \text{e se ela ir pro infinito,} \\ \text{ele vai a zero} \end{array} \right)$

$$x(t=0) = X_0 \quad (\text{enunciado})$$

$$x(t) = C \cos(\sqrt{\dots} 0 + \varphi)$$

$$X_0 = C \cos(\varphi)$$

↓

$$X_0 \quad \varphi = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = X_0 e^{\frac{-Bt}{2m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{B^2}{4m}} t\right)$$

↑
amplitude

↑
oscila